Образовательный Фонд «Талант и успех»

(Фонд «Талант и успех»)

ОЛИМПИАДНАЯ ЗАДАЧА КАК ПОВОД ДЛЯ ЗАНЯТИЯ КРУЖКА. «ОДНИМ РАЗРЕЗОМ»

(методические рекомендации для учителей школ и руководителей математических кружков)

Выпускная аттестационная работа слушателя программы переподготовки педагогических и управленческих кадров для реализации программ выявления и поддержки одаренных детей и молодежи «Большие вызовы»

Новиковой Ирины Ильиничны

Научный руководитель

Доцент, кандидат физико-математических наук

Солынин Андрей Александрович

Сочи 2018

ЗАЯВЛЕНИЕ О САМОСТОЯТЕЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ ВЫПУСКНОЙ АТТЕСТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Я, Новикова Ирина Ильинична, слушатель программы переподготовки педагогических и управленческих кадров для реализации программ выявления и поддержки одаренных детей и молодежи «Большие вызовы», заявляю, что в выпускной аттестационной работе на тему «**ОЛИМПИАДНАЯ ЗАДАЧА КАК ПОВОД ДЛЯ ЗАНЯТИЯ КРУЖКА. «ОДНИМ РАЗРЕЗОМ»** (методические рекомендации)», представленной для публичной защиты, не содержится элементов плагиата. Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных аттестационных и квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки. Я ознакомлена с действующим регламентом учебного процесса, согласно которому обнаружение плагиата (прямых заимствований из других источников без соответствующих ссылок) в соответствующей части выпускного аттестационного проекта является основанием для выставления члену проектной команды, ответственному за ее разработку, за выпускную аттестационную работу оценки «неудовлетворительно».

_____ (Новикова Ирина Ильинична)

АННОТАЦИЯ РАБОТЫ

Выпускная аттестационная работа посвящена вопросу решения геометрической олимпиадной задачи уровня начальной школы. Рассмотрены примеры, приведены методы решения, дана историческая справка. Работа выполнена в форме, доступной для понимания материала, как взрослыми, так и школьниками.

Ключевые слова: ось симметрии, биссектриса, перпендикуляр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Аннотация работы 2
2. Введение 4
3. Правильные многоугольники 6
    a. Квадрат 6
    b. Шестиугольник 7
    c. Равносторонний треугольник 8
4. Разносторонний треугольник 11
5. Теорема сгибания и вырезания 13
6. Метод поиска прямого скелета 14
7. Метод упаковки дисков 16
8. Задача про трехклеточный уголок 18
9. Историческая справка 19
10. Задачи для самостоятельного решения 20
11. Полезные электронные ресурсы 21
12. Источники 21

Введение.

«Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы,
но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия».
Д. Пойа

Статистика итогов математических олимпиад показывает, что к решению геометрических задач приступают только 10% участников, эти задачи, как правило, требуют нестандартного подхода.

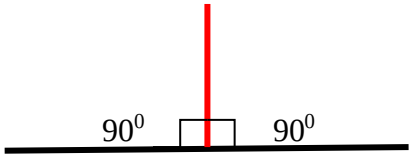
Решение геометрических задач олимпиадного уровня на занятиях математического кружка позволит подготовить учащихся к конкурсным мероприятиям, расширить их кругозор. Задача может стать источником для самостоятельного исследования, творческого открытия. Приведем пример такой задачи, предложенной для решения ученикам 4 класса на очном туре Санкт-Петербургской математической олимпиады начальной школы:

Покажите, как можно согнуть лист бумаги и сделать один прямолинейный разрез ножницами, чтобы вырезать из середины листа дырку в форме трёхклеточного уголка.

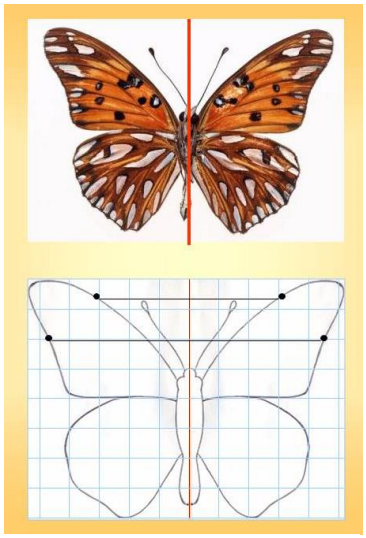
Назовем эту задачу - «Одним разрезом».

Для решения задачи вспомним следующие понятия:

- **Перпендикуляр** – это отрезок, проведенный к прямой под прямым углом (90 градусов)



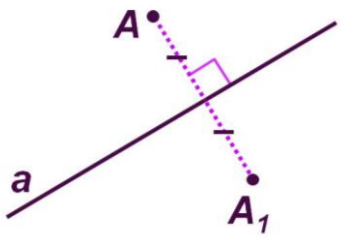
- **Ось симметрии** - прямая, которая делит геометрическую фигуру на две зеркально одинаковые.



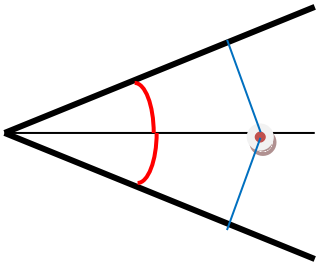
При сгибании плоскости чертежа по оси симметрии эти симметричные фигуры (половинки) полностью совмещаются.

Каждая точка фигуры совмещается с точкой, симметричной ей относительно данной оси.

Две точки А и A_1 называются симметричными друг другу относительно прямой *а*, если данная прямая перпендикулярна отрезку AA_1, соединяющему эти точки, и проходит через его середину.

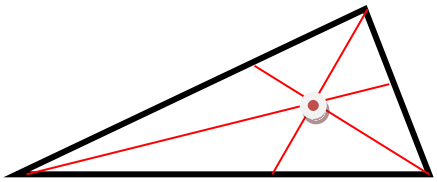


- **Биссектри́са** (от лат. bi- «двойное», и sectio «разрезание») угла - луч, исходящий из вершины угла и делящий угол на два равных угла.

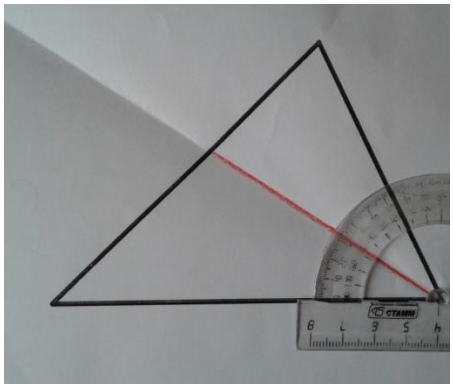


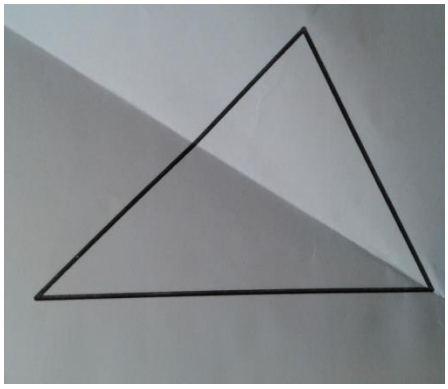
Точки, лежащие на биссектрисе – равноудалены от сторон этого угла.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла, проведенный от вершины угла до её пересечения с противолежащей стороной. У треугольника три биссектрисы, соответствующие трём его вершинам. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от всех сторон треугольника (перпендикуляры, опущенные из точки к сторонам треугольника равны между собой).



Чтобы построить биссектрису угла можно воспользоваться чертежным инструментом транспортир. А при решении задач на сгибание достаточно совместить стороны угла и сложить лист бумаги. Линия сгиба – биссектриса данного угла.





Итак, задача:

Сложить лист бумаги с изображением фигуры так, чтобы одним непрерывным прямолинейным разрезом можно было вырезать соответствующую фигуру ножницами.

Начинаем решать!

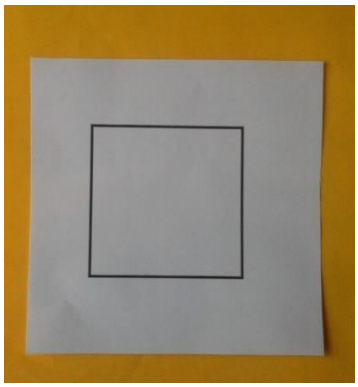
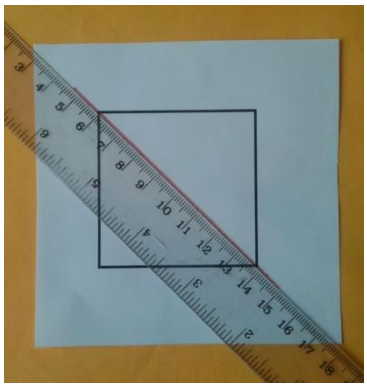
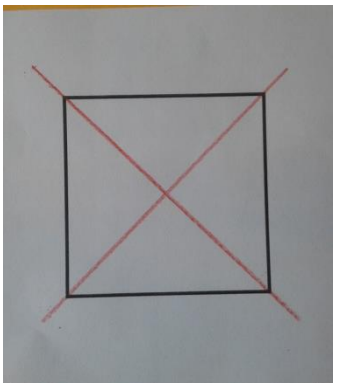
Правильные многоугольники.

Рассмотрим решение задачи складывания и вырезания для правильных многоугольников (стороны у них равны и углы равны): квадрата, правильного шестиугольника и правильного треугольника. *Диагонали этих фигур являются биссектрисами их углов и осями симметрии*.

Квадрат.

Решение:

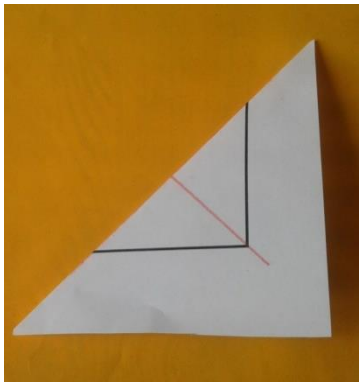
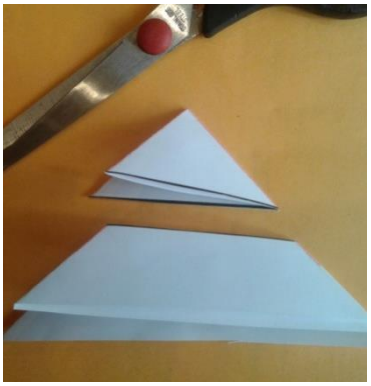
1. Чертим квадрат. 2.Проводим его диагонали 3. Получаем четыре равных треугольника

1. 
2. 
3. 

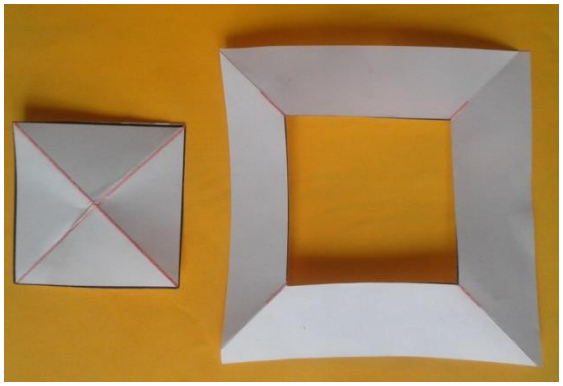
4. Складываем по одной диагонали (совмещаются два больших треугольника)

5. Затем по второй (в результате складывания получили совмещение внутренних одинаковых треугольников). Получаем «уголок».

6. Делаем прямолинейный разрез.

4. 
5.
6. 

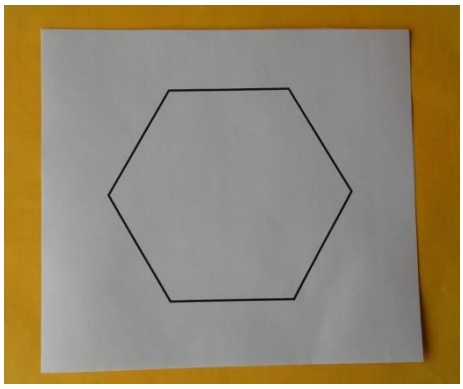
7. Результат работы:

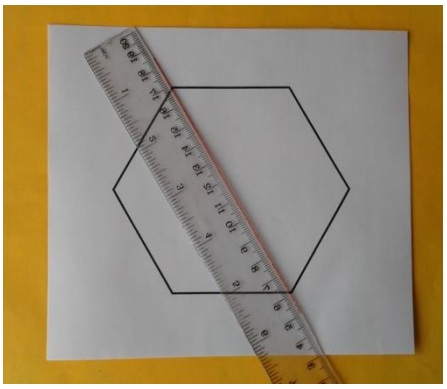
7. 

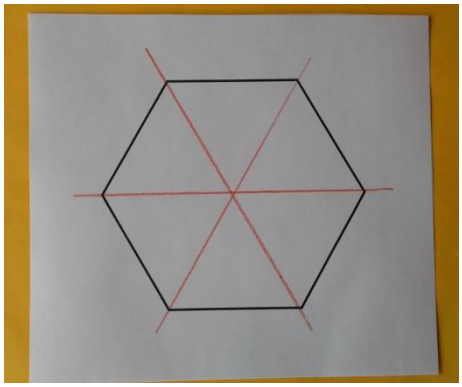
Правильный шестиугольник

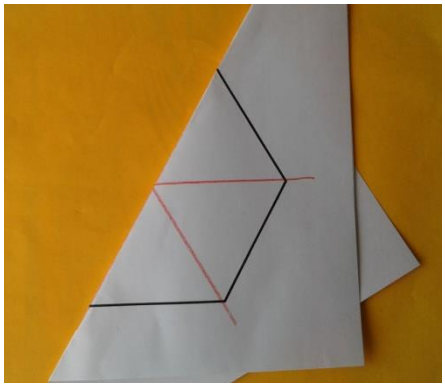
Решение:

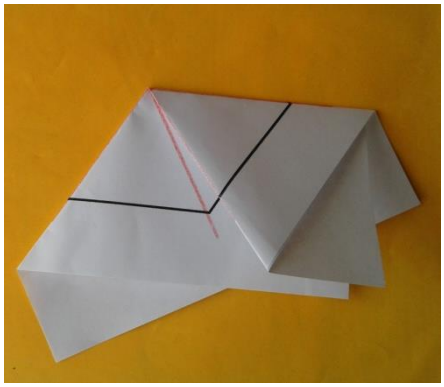
Решение этой задачи аналогично: проводим диагонали, пересекаясь, они образуют шесть равных треугольников. Складываем по диагоналям – биссектрисам, так, чтобы эти треугольники совместились. Получаем «уголок» и отрезаем его!

1. 

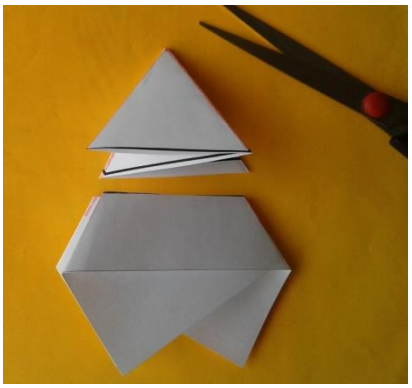
2. 

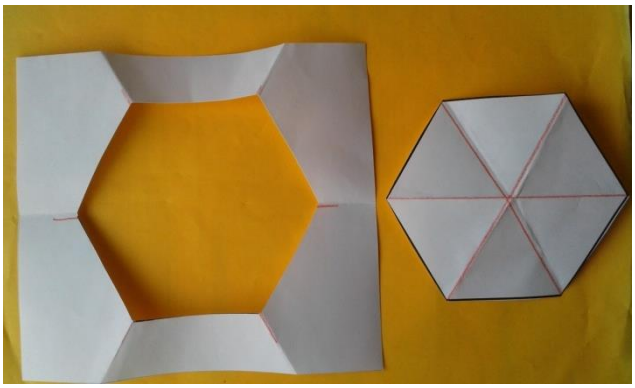
3. 

4. 

5. 

6.

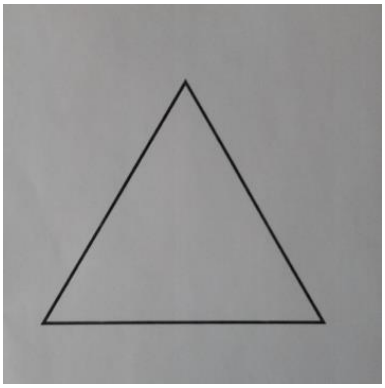
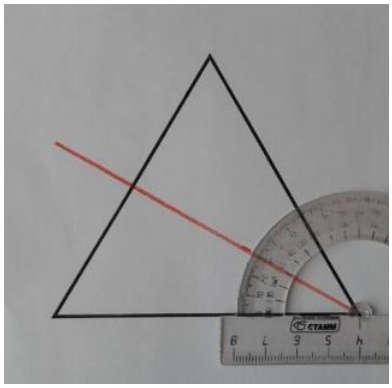
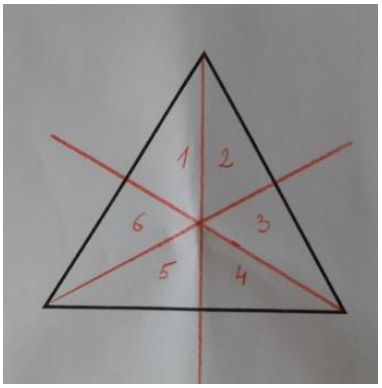
7. 

8. 

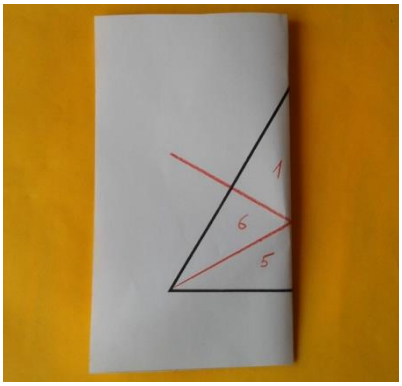
Равносторонний треугольник

Решение:

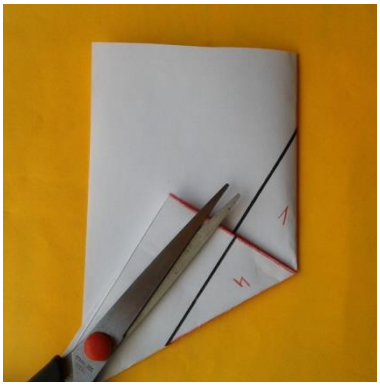
Осями симметрии равностороннего треугольника являются биссектрисы его углов. Поделить угол пополам поможет транспортир или можно сложить лист бумаги, совмещая стороны угла: линия сгиба пройдет по биссектрисе. Пересекаясь, биссектрисы образуют внутри исходного треугольника шесть равных треугольников.

1. 
2. 
3. 

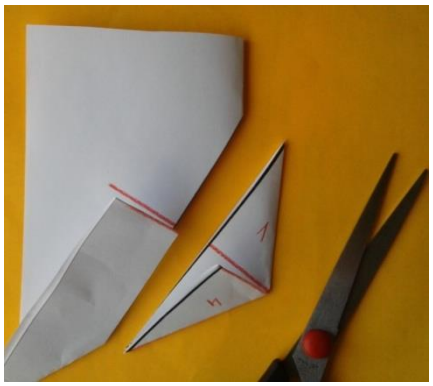
Складываем по биссектрисам, чтобы эти треугольники совместились. В данном случае совмещены 1-2 и 3-4-5-6 треугольники, чтобы уменьшить толщину складки (хотя, можно сделать еще один сгиб).

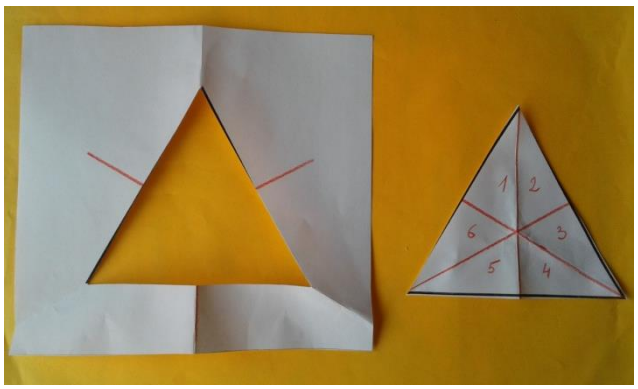
4. 

5.

6. 

Режем. Получаем нужный результат.

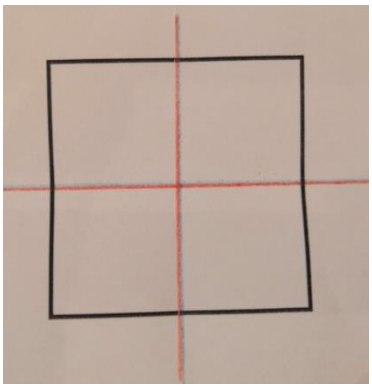
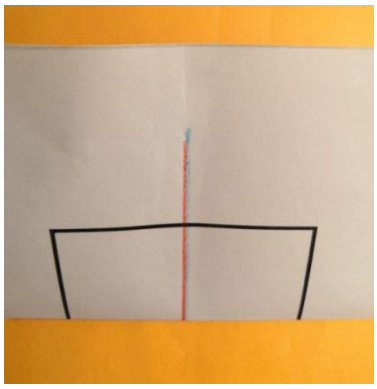
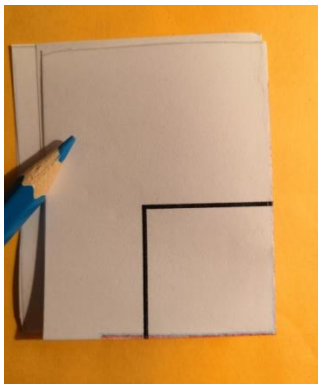
7. 

8. 

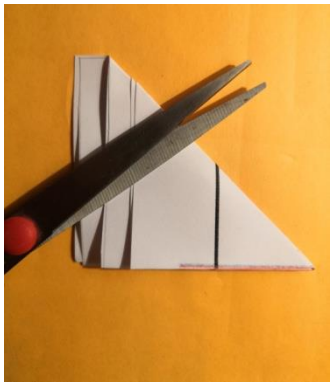
Рассмотрим решение задачи вырезания из листа бумаги квадрата и правильного шестиугольника, используя другие оси симметрии этих фигур, а именно отрезки, соединяющие середины противоположных сторон.

Квадрат.

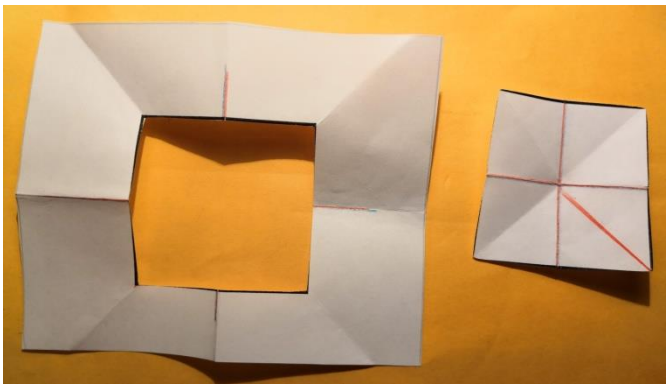
1. С помощью совмещения сторон и сгибов находим середины сторон квадрата и проводим оси симметрии. Получаем четыре равных квадрата.
2. Складываем по одной оси, а затем по второй.
3. Получили квадрат в четыре раза меньше исходного. Одним разрезом не обойтись!

1. 
2. 
3. 

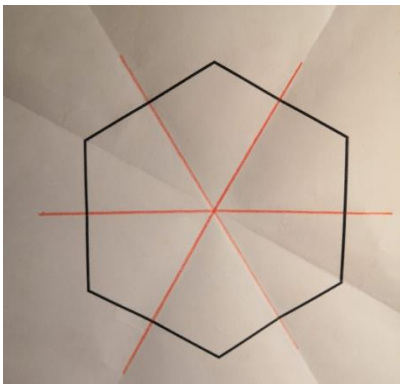
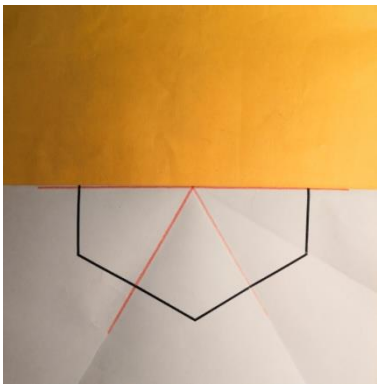
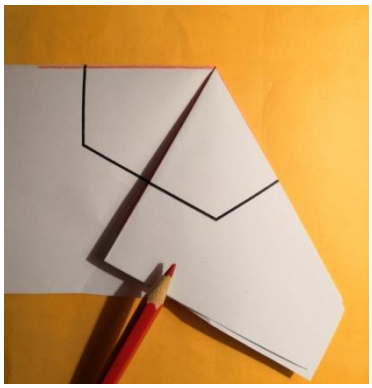
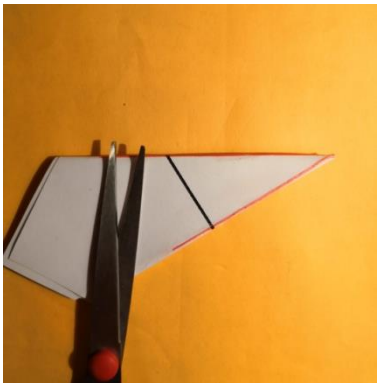
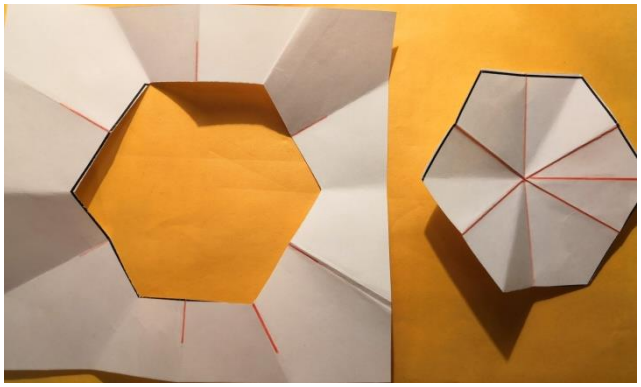
4. Строим диагональ угла маленького квадрата.
5. Складываем по диагонали.
6. Отрезаем «уголок»

4.
5. 
6.

7. Задача решена

7. 

Правильный шестиугольник.

1. 
2. 
3. 
4.
5.
6. 
7.
8. 

Рассмотренные примеры позволяют сделать вывод:

Чтобы вырезать одним разрезом из листа бумаги правильный многоугольник в виде дыры, достаточно провести оси симметрии и диагонали многоугольника. Они разделят многоугольник на равные треугольники или четырехугольники и одновременно будут являться линиями сгибов. Складывая по линям сгибов, нужно совместить равные фигуры до получения «уголка» (вершина уголка – точка пересечения осей симметрии) и сделать разрез.

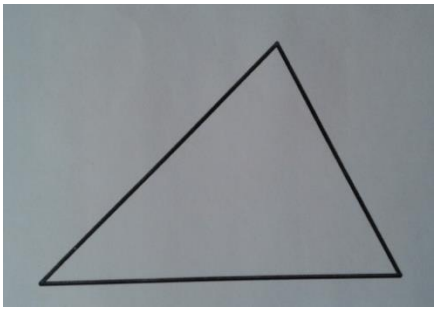
А если многоугольник не является правильным?

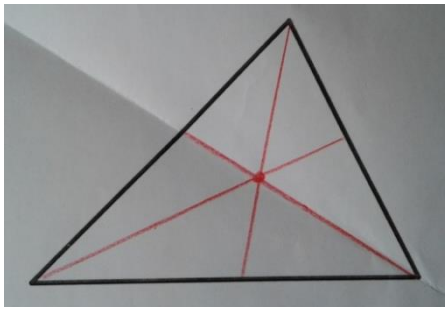
Рассмотрим решение задачи на примере разностороннего треугольника.

Разносторонний треугольник

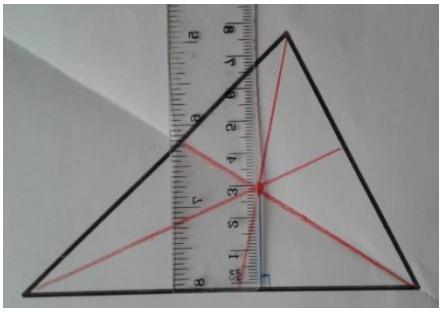
Решение:

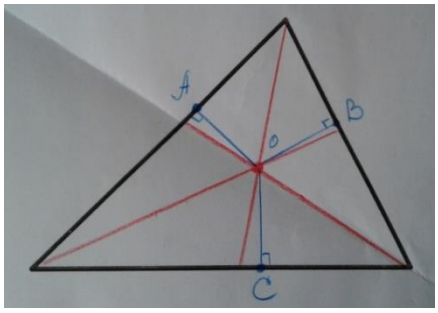
Разносторонний треугольник не имеет осей симметрии, но любой угол имеет ось симметрии, которая проходит по его биссектрисе. Опираясь на решения предыдущих задач, выполним построения, в результате которых получим одинаковые треугольники для их последующего совмещения. Строим биссектрисы углов.

1. 

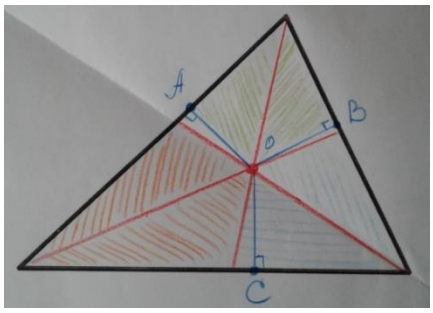
2. 

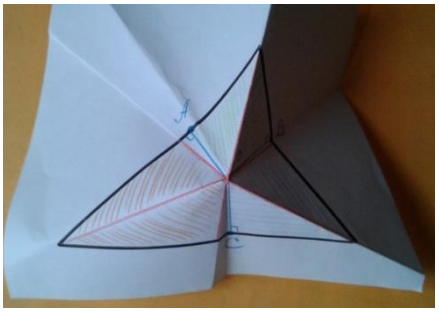
Так как точка пересечения биссектрис равноудалена от сторон треугольника, то опускаем из неё перпендикуляры ОА = ОВ = ОС на каждую из сторон треугольника.

3. 

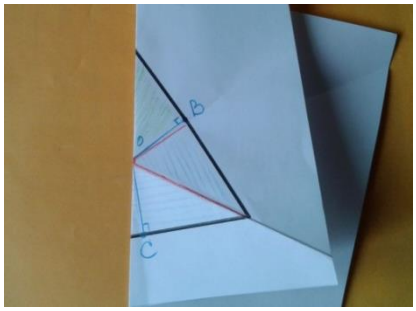
4. 

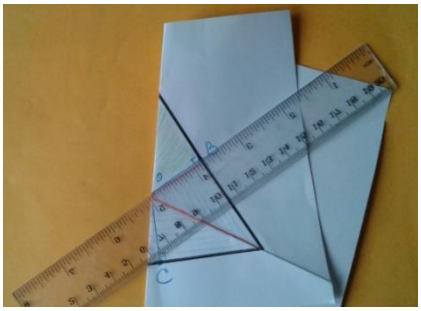
Получаем три пары равных треугольников («зеленые», «красные», «голубые»). Можно складывать! Сгибаем треугольник по биссектрисам.

5. 

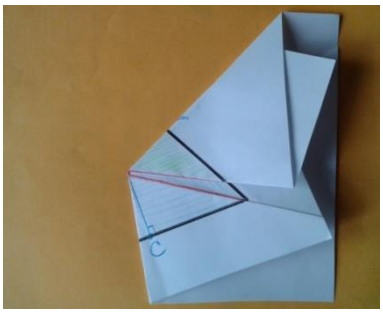
6. 

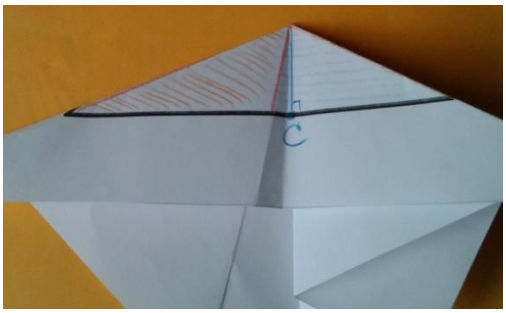
Совмещаем «зеленые» треугольники по биссектрисе. Затем сгибаем по перпендикуляру (ОВ)

7. 

8. 

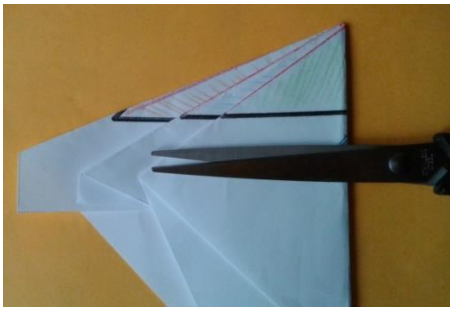
Совмещенные «зеленые» треугольники накладываются на «голубой». Совмещаем «голубые» треугольники по биссектрисе.

9. 

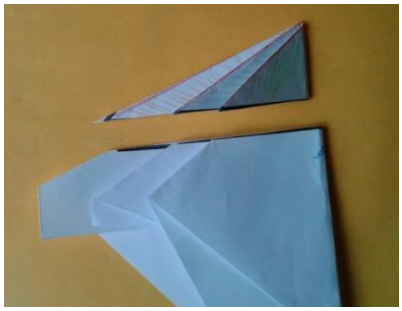
10. 

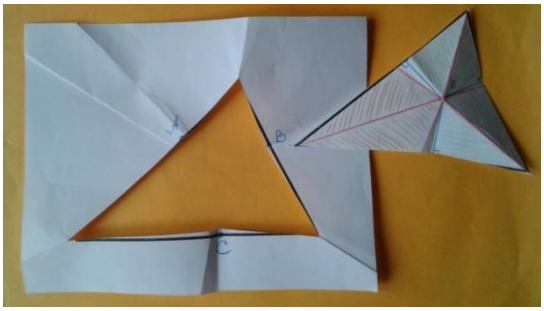
Сгибаем по перпендикуляру ОС. «Голубые» треугольники (вместе с «зелеными») накладываются на «красные». Получили «уголок» - три пары совместившихся треугольников. Стороны исходного треугольника находятся на одной линии. Можно отрезать.

11.

12. 

Итог работы.

13. 

14. 

Итак, чтобы вырезать из листа бумаги одним разрезом разносторонний треугольник, необходимо построить биссектрисы его углов и из точки пересечения биссектрис опустить перпендикуляры к каждой из сторон треугольника. Получим три пары равных треугольников. Отрезки биссектрис и перпендикуляры образуют линии складок: биссектрисы выпуклую – «холм», перпендикуляры внутреннюю – «долина». Складываем, совмещая равные фигуры до получения «уголка» (вершина «уголка» - точка пересечения биссектрис).

Теорема сгибания и вырезания

Дан произвольный многоугольник на плоском листе бумаги, можно ли так сложить этот лист, чтобы многоугольник можно было вырезать одним прямым разрезом?

Ответ: Можно.

Решение этой задачи основано на теореме **сгибания и вырезания.**

Теорема: *любую форму с прямыми сторонами можно вырезать из одного (идеализированного) листа бумаги, складывая ее плоской и делая один прямой полный разрез. Такие формы включают в себя многоугольники, которые могут быть вогнутыми, фигурами с отверстиями и коллекциями таких форм (то есть, регионы не обязательно должны быть связаны).*

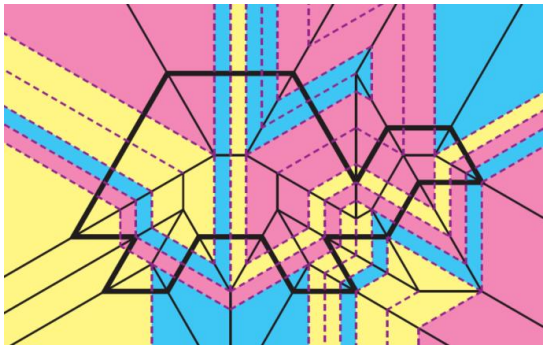
Утверждения этой теоремы можно представить в более простой формулировке:

Всегда можно так сложить лист бумаги, что любой многоугольник, нарисованный на нём, будет вырезаться одним прямолинейным разрезом. Более того, если многоугольников нарисовано несколько, то лист все равно можно сложить так, чтобы все их можно было вырезать одним разрезом.

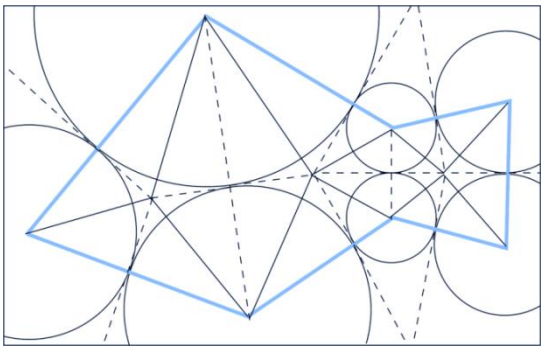
Первое доказательство теоремы сгибания и разреза было опубликовано в 1999 году Эриком Демейном , Мартином Демейном и Анной Люби. [6]

Теорема имеет два доказательства, которые описывают методы разбиения исходного многоугольника на равные треугольники и четырехугольники и построения линий сгибов.

1. **Метод поиска прямого скелета** [1], [4]



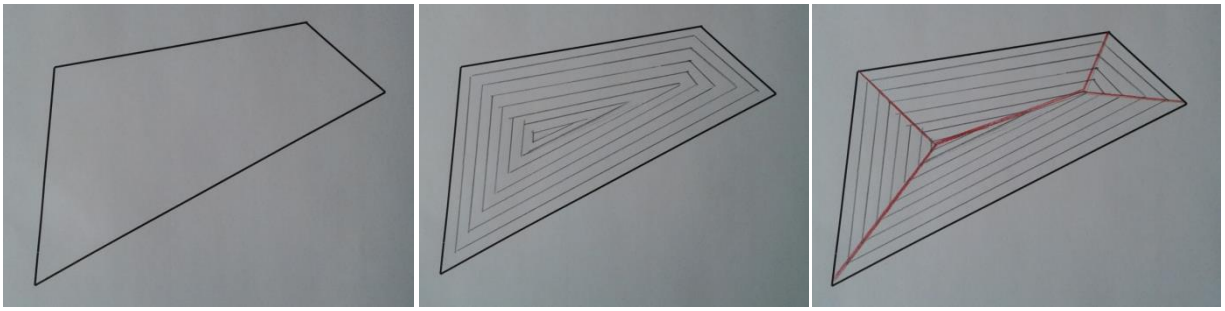
2. **Метод упаковки дисков** [1], [5]



Использованы рисунки с сайта http://erikdemaine.org/foldcut/

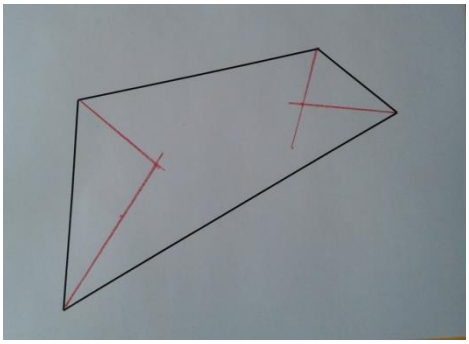
Метод поиска прямого скелета

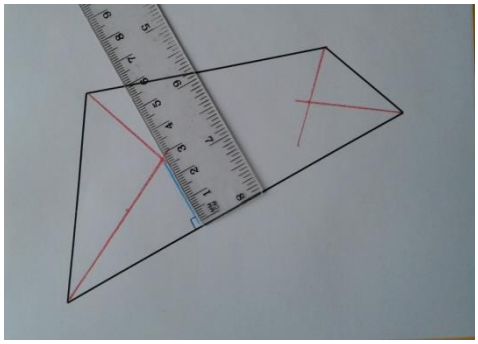
Прямолинейный скелет многоугольника (straight skeleton) - набор линий, который образуется вершинами многоугольника при их движении с постоянной скоростью «внутрь». Стороны двигаются, не меняя направления, вершины начинают свое движение по биссектрисам углов.



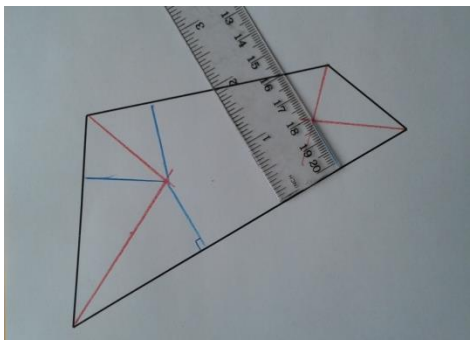
Применим метод поиска прямого скелета для вырезания произвольного четырехугольника.

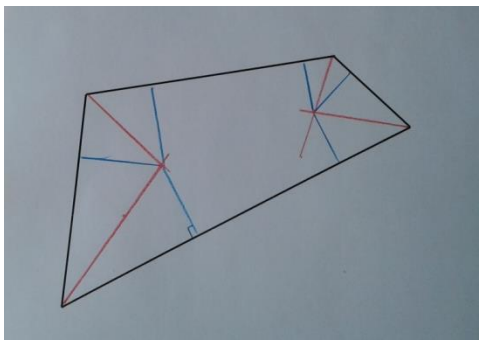
Проводим из каждого угла биссектрисы до их пересечения.

1. 

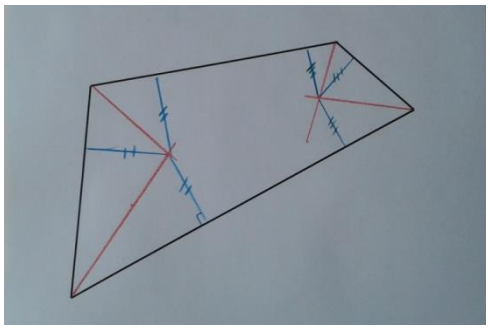
2. 

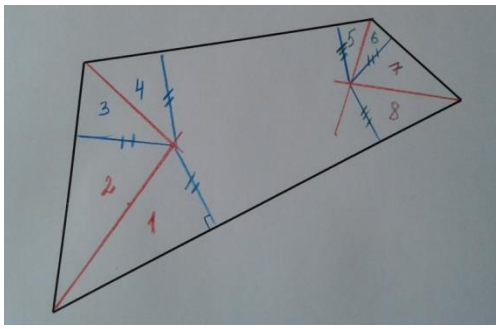
Опускаем перпендикуляры из точек пересечения биссектрис на каждую сторону четырехугольника.

3. 

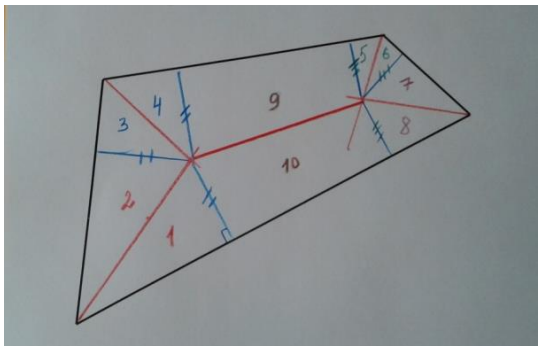
4. 

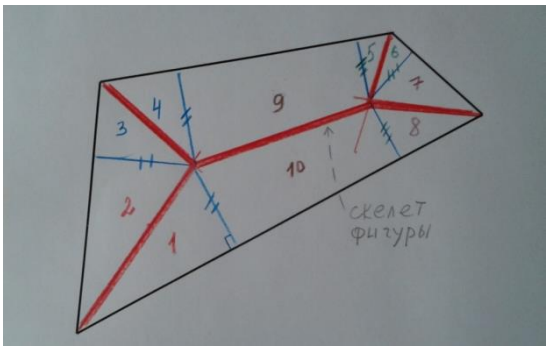
По свойству точки пересечения биссектрис получаем по три равных перпендикуляра. Следовательно, треугольники 1=2, 3=4,5=6,7=8.

5. 

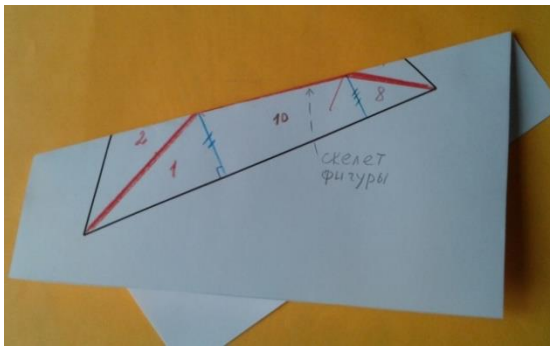
6. 

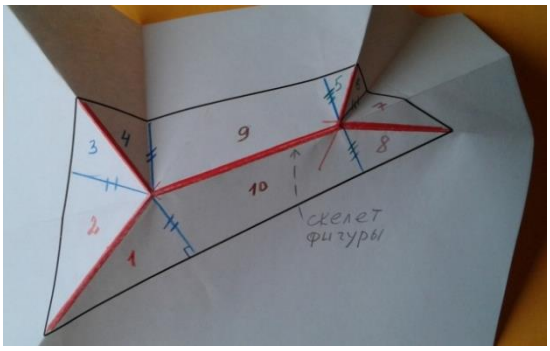
Соединим точки пересечения биссектрис. Четырехугольники 9 и 10 равны. Биссектрисы и соединяющий их отрезок образуют скелет фигуры.

7. 

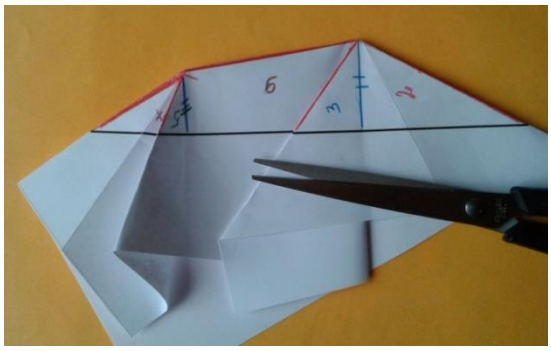
8. 

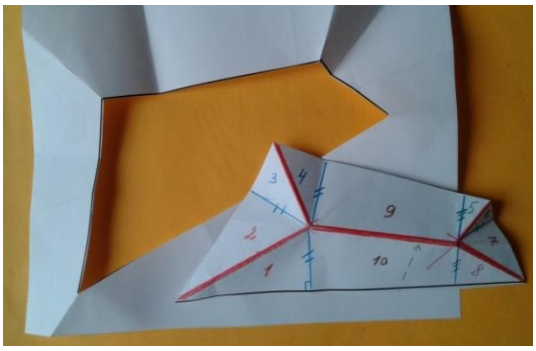
В результате построений получили пары равных фигур – треугольников и четырехугольников. Начинаем складывать по скелету. Затем по перпендикулярам.

9. 

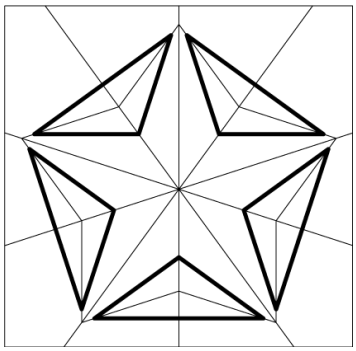
10. 

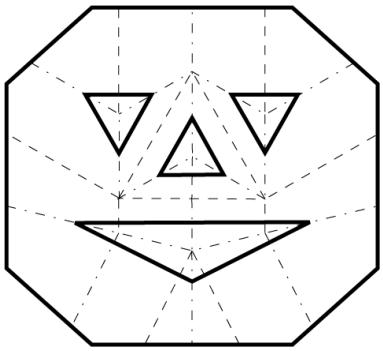
Накладываем совмещенные треугольники 5=6 на 7=8, треугольники 3=4 на 1=2 или внутренний четырехугольник. Стороны многоугольника легли на одну линию, режем по ней.

11. 

12. 

Примеры более сложных «простых скелетов» многоугольников можно найти на сайте Эрика Демейна http://erikdemaine.org/foldcut/examples/:

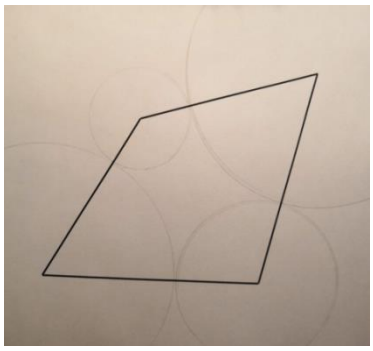


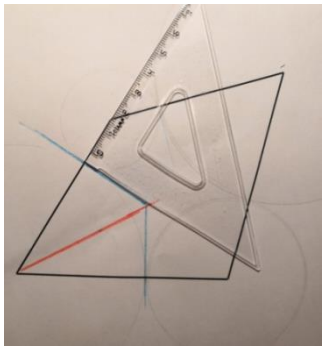


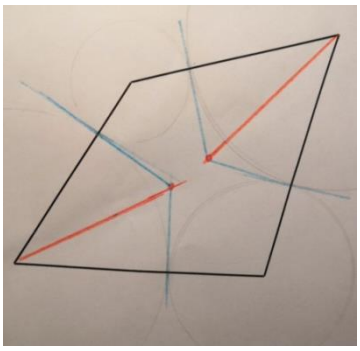
Метод упаковки дисков

Метод упаковки дисков основан на идее разбиения многоугольника на треугольники и четырехугольники с помощью окружностей, центры которых расположены в его вершинах.

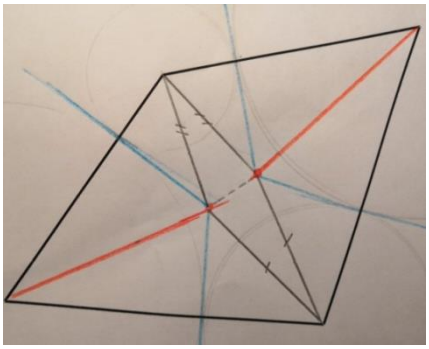
Рассмотрим простой пример построения системы линий складок многоугольника для вырезания одним разрезом с помощью построения соприкасающихся окружностей. Центры окружностей находятся в вершинах многоугольника. Из противоположных вершин строим биссектрисы углов. Проводим перпендикуляры через точки касания окружностей до пересечения с биссектрисами. Получили пары равных треугольников.

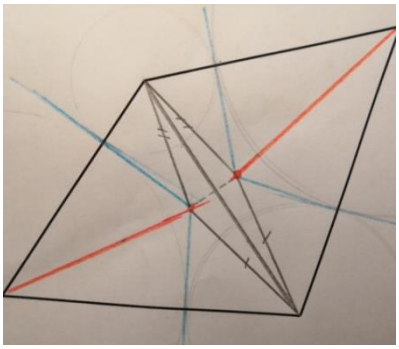
1 

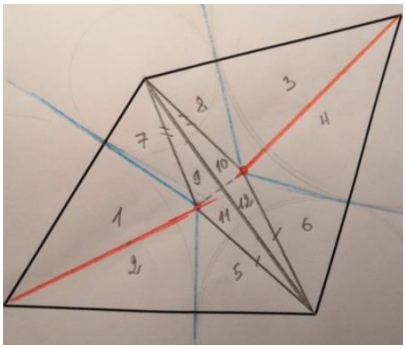
2 

3 

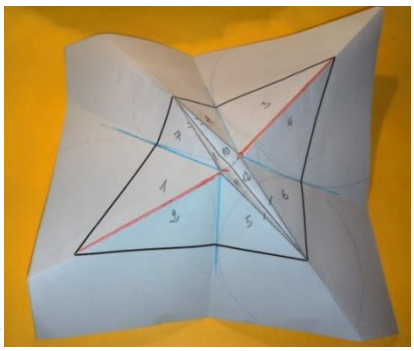
Соединяем точки пересечения биссектрис и перпендикуляров (пунктир) и две другие вершины отрезками. Проводим диагональ. Исходный многоугольник разделили на пары равных треугольников: 1=2, 3=4, 5=6, 7=8, 9=10, 11=12.

4 

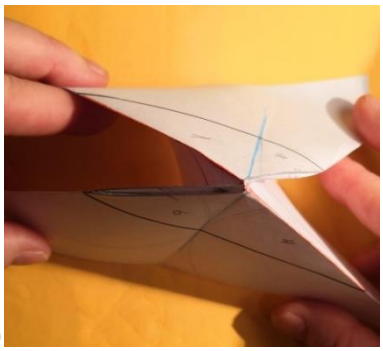
5 

6 

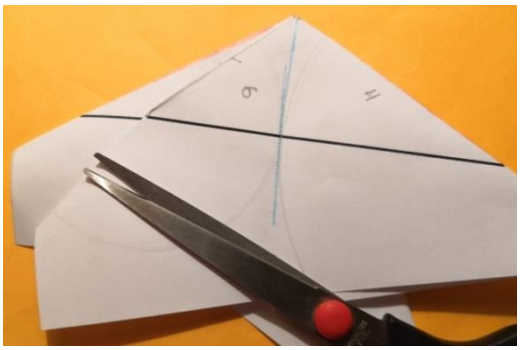
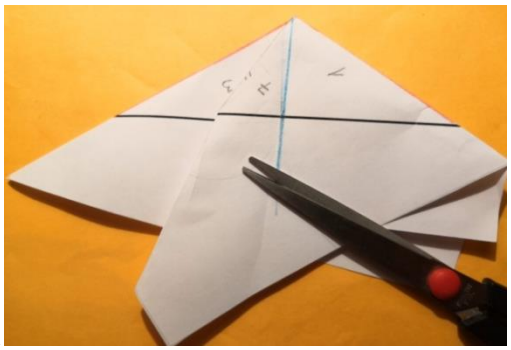
Складываем ребрами вверх («холмы») по биссектрисам и сторонам внутреннего четырехугольника, ребрами вниз («долины») по перпендикулярам и диагоналям внутреннего четырехугольника. Совмещаем треугольники 9-10, 11-12. Накладываем совмещенные треугольники 5-6 на 1-2, а 7-8 на 3-4.

7 

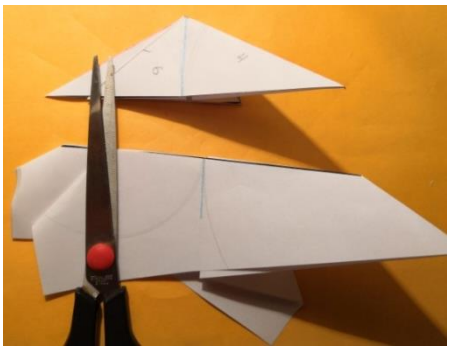
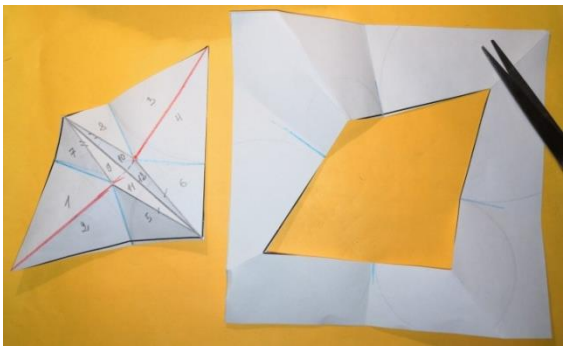
8

9 

Вид сложенной фигуры с одной и с обратной стороны. Все стороны многоугольника лежат на одной линии.

10  11 

Делаем один разрез по этой линии.

12  13 

Примеры построения сеток для получения сгибов для складывания многоугольника методом упаковки дисков.

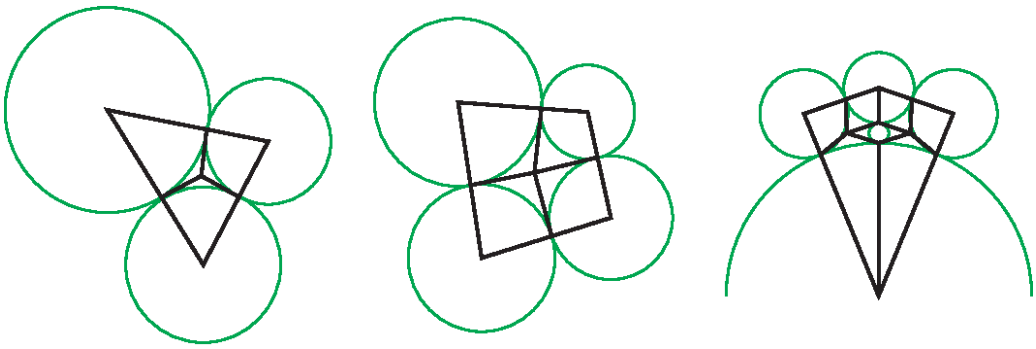


Рисунок с сайта https://www.semanticscholar.org/paper/Quadrilateral-Meshing-by-Circle-Packing-Bern-Eppstein/4dd5113250e5dfb13217efdbaf94b9c17e3276a8

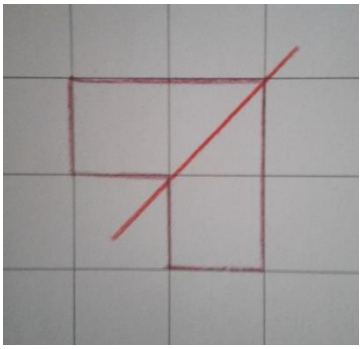
Задача про трехклеточный уголок

Решим геометрическую задачу, сформулированную в начале работы.

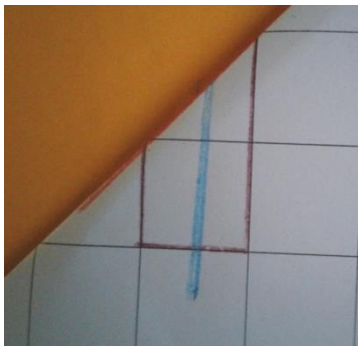
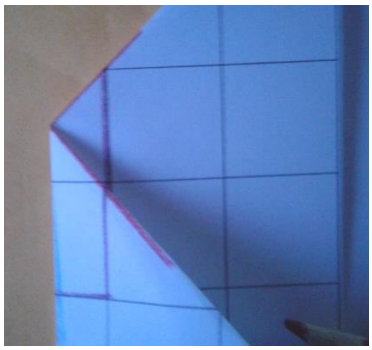
Покажите, как можно согнуть лист бумаги и сделать один прямолинейный разрез ножницами, чтобы вырезать из середины листа дырку в форме трёхклеточного уголка.

Решение:

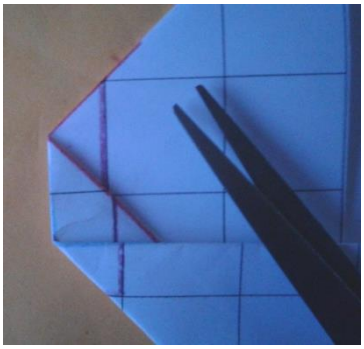
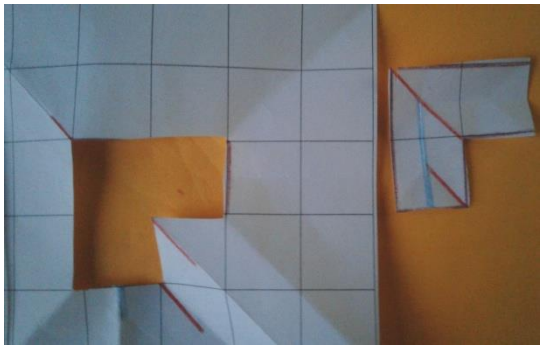
Чертим трехклеточный уголок. Это симметричная фигура. Проводим ось симметрии через вершины внешнего и внутреннего прямых углов. Складываем трехклеточный уголок по оси симметрии. Получили четырехугольник. Он называется трапеция.

1. 
2.

Строим среднюю линию четырехугольника – она соединяет середины противоположных сторон. Сгибаем четырехугольник по средней линии, совмещая его боковые стороны.

3. 
4. 

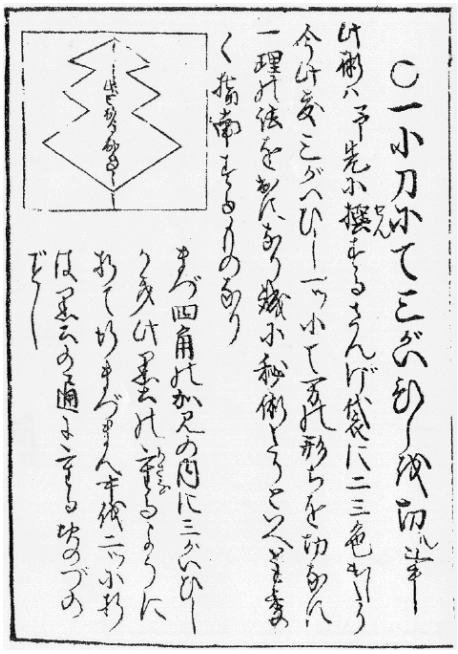
Снова получили трапецию. Складываем нижний правый прямой угол по биссектрисе, совмещая стороны угла. Все стороны трёхклеточного уголка лежат на одной линии – это линия среза. Режем и получаем нужный результат.

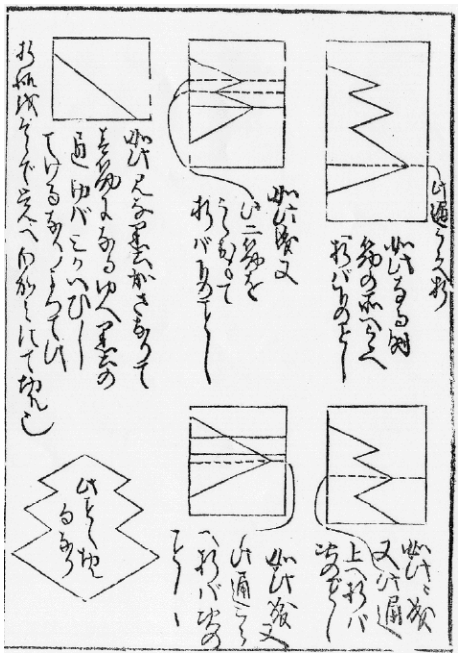
5. 
6. 

Историческая справка

В 1721 году Кан Чу Сен, опубликовал книгу «Вакоку Чиекурабе» (математические соревнования), в которой впервые формулируется задача на складывание и резку: как сложить прямоугольный лист бумаги плоско и сделать один полный прямой разрез, чтобы получить геральдический знак - японский гребень (три сложенные ромба). Автор приводит решение, состоящее из последовательности простых складок по линиям.

Вот отсканированные изображения соответствующих страниц книги. [2]





Вырежете японский гребень по старинным чертежам!

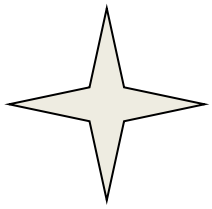
Рассмотренные решения простых задач на складывание и резку позволяют сделать предположение: если лист бумаги складывать по осям симметрии, биссектрисам углов многоугольника, диагоналям многоугольника и перпендикулярам к сторонам многоугольника, то можно получить плоскую фигуру, в которой все стороны исходного многоугольника лежат на одной прямой линии, она будет являться искомой линией разреза.

Чтобы научиться самостоятельно решать задачи такого типа, нужно пробовать: сначала выполнять решение по образцу, смотреть примеры (они есть в списке «Полезные электронные ресурсы»). А затем, используя полученные знания и опыт, применять их в решении новых задач.

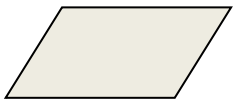
Задачи для самостоятельного решения

Сложите лист бумаги с изображением фигуры так, чтобы одним непрерывным прямолинейным разрезом можно было вырезать соответствующую фигуру ножницами.

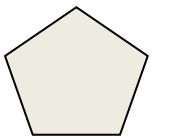
Задача 1 Правильная четырехконечная звезда



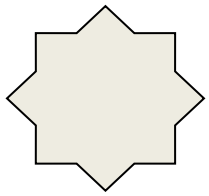
Задача 2 Параллелограмм



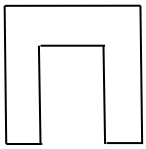
Задача 3 Правильный пятиугольник



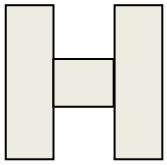
Задача 4 Правильная восьмиконечная звезда



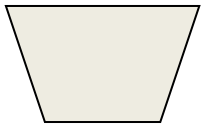
Задача 5 Буква «П»



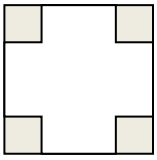
Задача 6 Буква «Н»



Задача 7 Трапеция



Задача 8 Четыре маленьких квадрата в углах большого квадрата



Полезные электронные ресурсы:

1. Один раз отрежь! - Режим доступа: http://elementy.ru/problems/880/Odin_raz_otrezh
2. Одним разрезом. К. Пахомова - Режим доступа: https://kvantik.com/issue/pdf/2016-02.pdf, стр 7-16
3. Математические этюды. Одним разрезом. - Режим доступа: http://www.etudes.ru/ru/etudes/fold-cut-problem
4. Мышематематика. Женя Кац. Шестилучевая звезда одним разрезом. - Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=WTzXKCUF1lg
5. Мышематематика. Женя Кац. Елочка одним разрезом. - Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=J89U8zJXrtc
6. Мышематематика. Женя Кац. Буква «А» одним разрезом. - Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=N1CAX1ffQRY
7. Фигурка котика одним прямолинейным разрезом. Fold-and-cut. - Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=QVrV3STSYYA

Источники:

1. Erik Demaine's Folding and Unfolding: The Fold-and-Cut Problem. - Режим доступа: http://erikdemaine.org/foldcut/
2. The Fold-and-Cut Problem: Kan Chu Sen's Wakoku Chiyekurabe. - Режим доступа: http://erikdemaine.org/foldcut/sen_book.html
3. The Origami Polygon Cutting Theorem. By Eric Biunno. - Режим доступа: http://cgm.cs.mcgill.ca/~athens/cs507/Projects/2003/EricBiunno/
4. A Disk-Packing Algorithm for an Origami Magic Trick - Режим доступа: http://erikdemaine.org/papers/OSME2001b/paper.pdf
5. Demaine, Erik D.; Demaine, Martin L.; Lubiw, Anna *(1999), "Folding and one straight cut suffice"*, Proceedings of the Tenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '99), *pp. 891–892*.
6. Designing Roofs of Buildings. By David Bélanger - Режим доступа: http://www.sable.mcgill.ca/~dbelan2/roofs/roofs.html
7. Бланк заданий очного тура Санкт-Петербургской математической олимпиады начальной школы - Режим доступа: https://drive.google.com/file/d/1ndUPRR6zG0qp1IIkg7WtFS_6wJRNnHa5/view

Фотографии, использованные в работе, выполнены автором.